

Важной геометрической теоремой является теорема Фалеса. Она гласит, что каждый угол, вписанный в полуокружность, — прямой, то есть что вокруг каждого прямоугольного треугольника может быть описана касательная к нему полуокружность. Доказать эту теорему можно разными путями. Самый распространенный, но вовсе не самый лучший исходит из чертежа: точку P полуокружности соединяют с концами диаметра и с центром полуокружности. При этом получаются равнобедренные треугольники, сумма углов у основания которых (как сумма углов треугольника) = 180° ; $2x \times 2y = 180^\circ$, $2x + y = 90^\circ$, угол у точки P прямой.

Как мы пришли к этому? Мы вывели теорему строго логически, целенаправленно накладывая один элемент на другой. Нигде мы не выходили за рамки этой теоремы, нигде не бросили взгляд на общий геометрический ландшафт. Мы собрали воедино известные факты, направляя свои усилия на достижение определенной цели.

Этот путь математически бесспорен. Является ли он таким же в методическом отношении? Достаточно ли в нем напряжения, может ли он вызвать у ученика то состояние активности, которое только и способствует продвижению вперед? Чего требует этот путь от ученика? Внимания, готовности воспринять излагаемый материал и понять его. Нельзя ли иначе вести дело с 14 — 15-летними детьми? Мы должны удовлетворять их стремление к деятельности, их смелость. Ученик должен иметь возможность искать и находить собственные пути. При этом он может пойти и ложным путем, попасть в тупик. Разве не бывает так, что ученики при словах: «Сегодня мы будем проходить теорему известного математика Фалеса из Милета» — издают внутренний стон: «Еще одну!» Выводить, доказывать, учить, пережевывать... Разве подход, начинающийся определениями: «Точка это...», «Прямая это...» и далее в том же духе, не парализует волю, не сужает свободу взгляда, не лишает радости открытия?

При вышеприведенном способе исходят из слишком большого количества данных. Полуокружность и прямой угол не должны вводиться в самом начале, а находиться в геометрическом процессе. Следует искать полного напряжения «входа» (Мартин Вагеншайн) и пробудить стремление к решению примерно в смысле Виттенберга: «Не давай пить не испытывающему жажду!» Мы могли бы попытаться вызвать эту жажду.

Предложим ученикам вписать в круг любые треугольники и рассмотреть их. Среди них будут широкие и узкие, перевернутые вверх ногами, остроугольные и тупоугольные. Чем отличаются эти два последних вида треугольников? Конечно, их углами. А больше ничем? Остроугольные ближе к краю, тупоугольные в большей степени внутри окружности. Если ученики не придут к этому самостоятельно, тогда выбирают на окружности вершину треугольника и смещают основание треугольника параллельно вниз. «Узкие» треугольники оказываются вверху, «широкие» внизу. Если ученики и после этого не замечают, о чем идет речь, тогда на чертеже отмечают центр окружности M . Теперь что-то проясняется. У остроугольных треугольников центр окружности лежит внутри треугольника, а у тупоугольных — вне треугольника. Где же происходит переход? От острого к тупому углу? Раскрываем учебный циркуль сначала немного, потом широко. Переход — прямой угол. Если мы основание треугольников проведем через центр окружности, треугольник становится прямоугольным. Выберем этот специальный случай и начертим полукруг и целый ряд треугольников внутри его разноцветным мелом. Все они оказываются прямоугольными. На этом мы расстаемся до следующего дня.

На следующий день мы подойдем к проблеме с другой стороны, но опять-таки динамично, в движении. Начертим в окружности диаметр и рассмотрим два треугольника с вершинами P_1 и P_2 . Один из них — остроугольный, другой — тупоугольный. Сохраним основание, но будем приближать друг к другу вершины. Как изменится форма треугольников? Они становятся все более похожими друг

на друга. В конце концов обе вершины совмещаются на окружности. Оба треугольника стали прямоугольными, так как острый угол совместился с тупым.

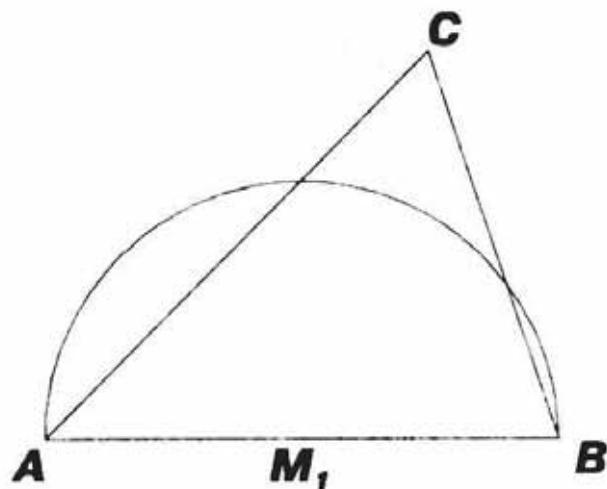
Еще раз рассмотрим треугольники, образующиеся в том случае, когда вершина P остается неизменной, а основание параллельно переносится вниз. Сначала основание невелико, угол тупой. Основание увеличивается, становится наибольшим, когда проходит через центр окружности. После этого оно опять уменьшается, треугольник становится остроугольным. При переходе от тупого угла к острому (при прямом угле) основание как раз проходит через центр окружности, оно становится ее диаметром. Прямой угол и диаметр, или, лучше сказать, прямой угол и полуокружность, таким образом, имеют нечто общее. Предоставим ученикам рассказать об этом и устно сформулировать их представления. И в этом случае мы должны, терпеливо ожидая, идти вперед осторожно, без нажима. Из их, часто беспомощных, предложений мы выберем все пригодное, дополним — и, наконец, теорема станет ясной и абсолютно понятной в ее простейшей форме.

Возможен и такой путь: мы вбиваем в доску два гвоздя и перемещаем между ними прямоугольный треугольник. Проверяем, какой путь описывает вершина прямоугольного треугольника. Это — полуокружность. Из этого с легкостью вытекает, что окружность Фалеса — это геометрическое место точек.

Для многих построений окружности бывает лучше сначала вместо большого циркуля использовать шнур. Ведь при работе с циркулем утрачивается нечто существенное для понимания — радиус. Если, например, на конце отрезка D , в точке E , нужно построить перпендикуляр к отрезку, с помощью шнура описывают окружность с конечной точкой E . Очень хорошо, что при этом можно выбрать центр окружности M там, где мы захотим. От точки пересечения с отрезком D проводим через M прямую (диаметр!) до ее повторного пересечения с окружностью в точке C . CE — искомый перпендикуляр.

Этот метод является спасительным при необходимости

и в следующей ситуации: вместо того чтобы измерять и обсчитывать треугольники только в тетради, мы перенесем поле нашей деятельности на волю, будем заниматься геометрией на улице. Каждой группе дается задание измерить и обсчитать заданный треугольник, нарисованный на спортивной площадке. Сумму сторон определить легко, но в том, что касается площади, возникает непредвиденная трудность: где высота? где ее основание? Вообще-то его можно определить: с руками, вытянутыми параллельно основанию треугольника, мы перемещаемся в разные стороны по этому основанию, постоянно следя через визир за противоположной вершиной треугольника. Но как быть, если требуется абсолютно точно определить основание H высоты? Высота должна проходить перпендикулярно к основанию треугольника, при этом образуется прямой угол. В этом случае нам на помощь должен прийти Фалес. Давайте сюда шнур!



От середины M_1 стороны AC будет проведена дуга с радиусом $AM_1 = CM_1$. Там, где конец шнура пересекает основание треугольника, лежит искомое основание высоты H . Проверка: полуокружность над стороной BC (ученики обычно хотят провести полукруг над стороной AB , но прямой угол оказывается у точки H). Теперь можно измерить высоту и высчитать площадь треугольника.

Такие полезные упражнения в измерении оказываются абсолютно оправданными в преподавании геометрии. Они не только вносят желаемое разнообразие в обучение, они

одновременно дают прекрасную возможность включаться в процесс работы. Ученики работают по своим идеям, самостоятельно, с собственным разделением работы. При этом проявляют себя практики. Иногда может проявляться и здоровое соперничество, как, например, при следующем задании: каждая группа должна начертить прямоугольный треугольник, причем стороны прямого угла должны иметь длину 10 и 12 м. Затем следует с точностью до сантиметра измерить самую длинную сторону треугольника. Какая группа работает точнее? Материал: гимнастические палки, измерительная лента, шнур для окружности Фалеса. Учитель при этом уже высчитал по теореме Пифагора, что искомая сторона (гипотенуза) имеет длину 15,62 м.

Теперь же теорема Фалеса должна быть доказана. Это можно сделать и способом, приведенным в пугающем примере в начале нашей геометрической главы. Но в заключение будет уместен и логический способ доказательства. Доказательство может быть проведено простым способом. Вокруг каждого прямоугольника можно описать окружность. Центром ее будет точка пересечения диагоналей. Если у этой фигуры убрать половину, останутся прямой угол и полукруг.

В заключение можно противопоставить круг и прямой угол: круг, замкнутый в себе, полностью закругленный, связанный с космическими силами (звездные пути, радуга), овеянный дыханием бесконечности. Он встречается и в форме цветков у растений и в волнах, расходящихся кругами от брошенного в воду камня.

Совершенно иное — прямой угол. В природе он встречается значительно реже, а именно там, где природа застывает, — в кристаллах. Это особая форма угла придумана и сотворена человеком. Беда, если мы совсем немножко отклонимся от него при строительстве небоскреба. Насколько знаменитыми стали именно исключения — «падающие» башни в Пизе и Болонье! У египтян возведение прямого угла, например при строительстве пирамиды, было праздником. Что значил этот угол для римлян при строительстве городов и улиц! Как много прямых углов находим мы и в классной комнате!

Важно, чтобы ученики смогли проникнуть в суть математического образования и понять, как в этом случае оба антипода, забыв о своей противоположности, дают фундаментальную теорию геометрии. Приведенный здесь метод выводения теоремы, при котором факты не должны даваться в готовом виде, а находится, является принципом, к осуществлению которого следует стремиться везде. Например, в теореме Пифагора: над сторонами равностороннего треугольника мы строим по квадрату (два красных и один синий). Таким образом, окрашенная в красный цвет площадь в 2 раза больше синей. Если мы будем опускать вершину треугольника, красные квадраты будут становиться все меньше и меньше, а синий квадрат останется таким же. Где-то на этом пути сумма площадей красных квадратов оказывается равной площади синего квадрата. Где?